Definizioni di limite di una funzione

Possono distinguersi i seguenti casi, illustrati graficamente

a) Si dice che, per x che tende a c, la funzione *y = f(x)* tende all'infinito e si scrive $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ se, fissato un numero M > 0, grande a piacere, è possibile in corrispondenza determinare un intorno *J* di c tale che, per ogni x dell'intorno *J*, con x $\neq$ c, valga

$$|f(x)| > M$$

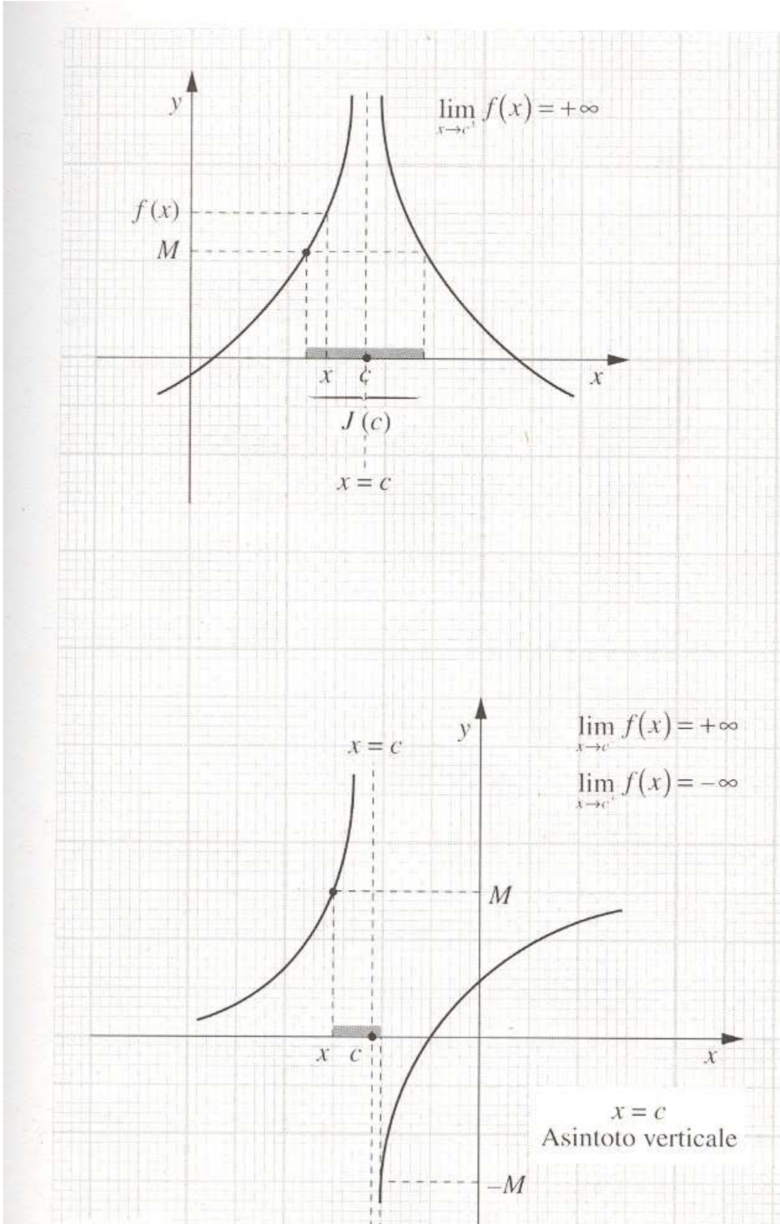


fig. 1

b) Si dice che, per x che tende ad infinito, la funzione *y* =*f* (x) tende al limite finito *l* e si scrive $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$

se, fissato un numero positivo ε, piccolo a piacere, è possibile in corrispondenza determinare un intorno di infinito tale che, per ogni x dell'intorno, valga $|f(x) - l| < \varepsilon$

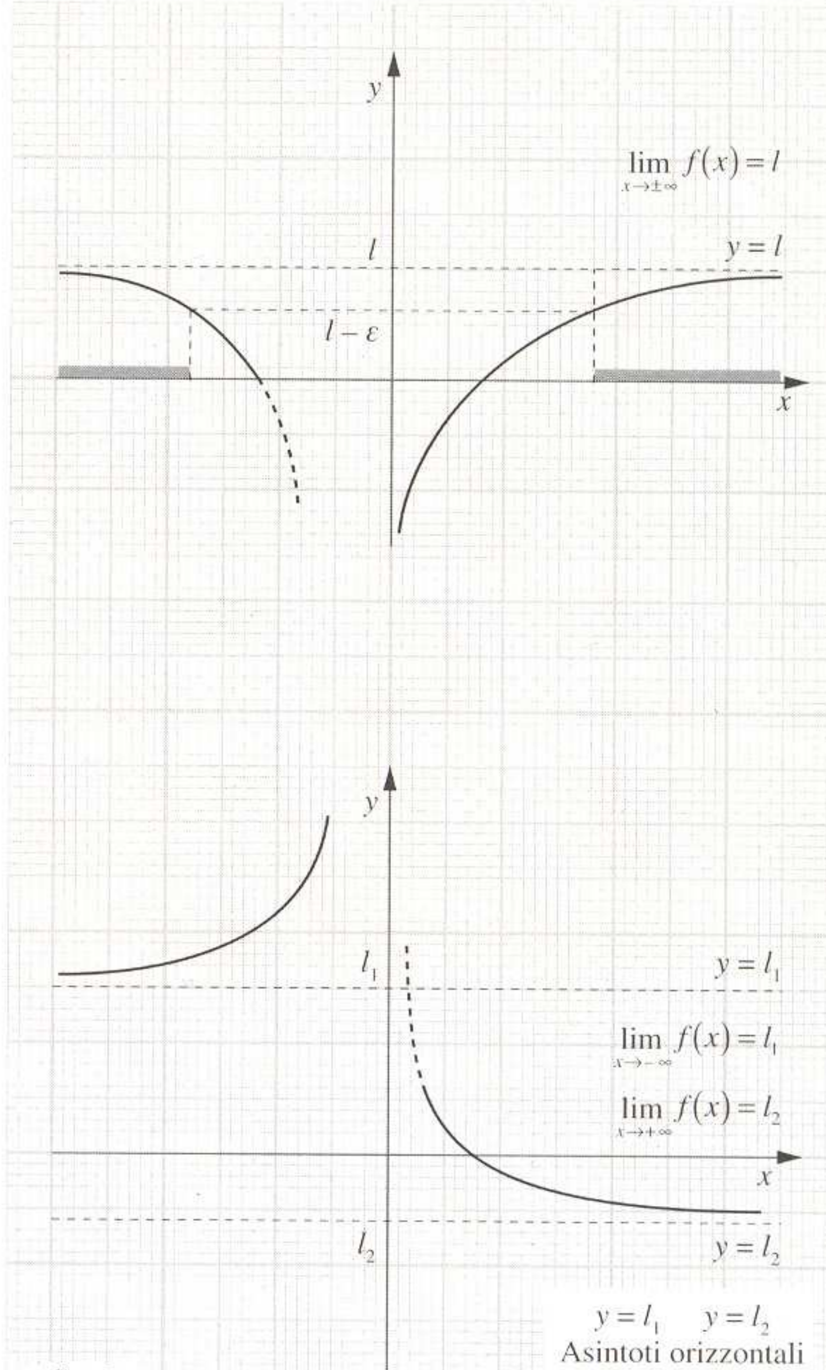


fig. 2

c) Si dice che, per x che tende a c, la funzione $y = f(x)$ tende al limite finito l e si scrive $\lim_{x \to c} f(x) = l$ se, fissato un numero positivo ε, piccolo a piacere, è possibile in corrispondenza determinare un intorno J di c, tale che, per ogni x dell'intorno J, eventualmente con $x \neq c$, valga $\left| f(x) - l \right| < \varepsilon$

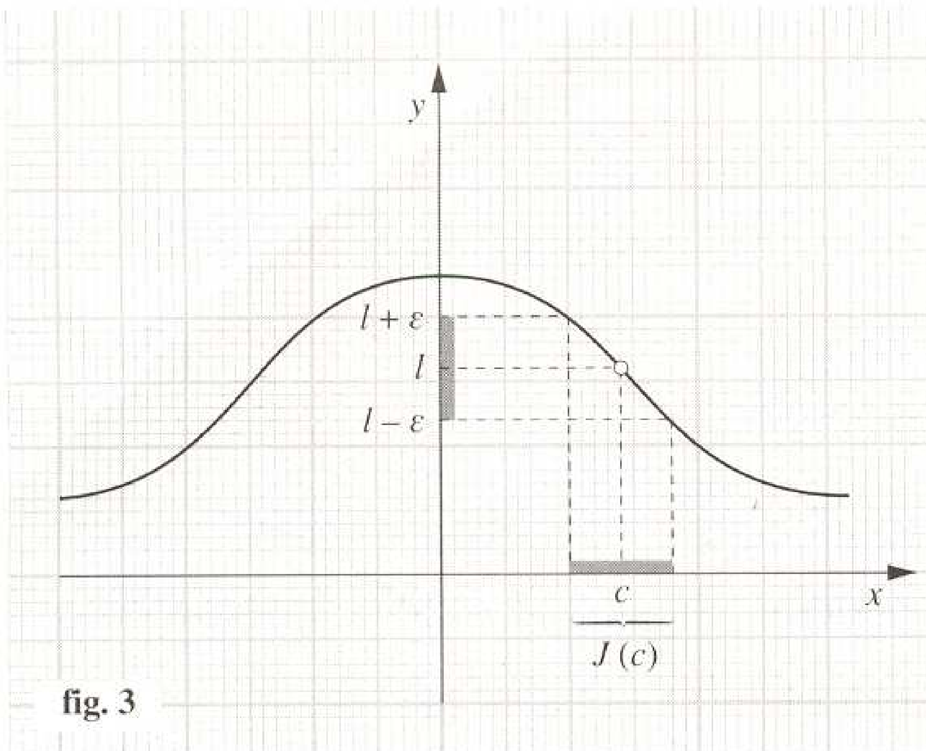


fig. 3

d) Si dice che, per x che tende ad ∞, la funzione *y=f(x)* tende all'infinito e si scrive $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

se, fissato un numero positivo M, grande a piacere, è possibile determinare in corrispondenza a M, un intorno di infinito tale che per ogni x dell'intorno valga

$$|f(x)| > M$$

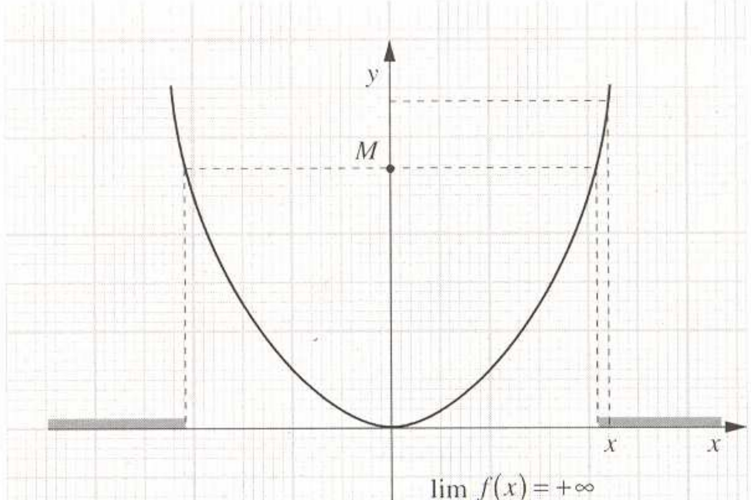


fig. 4

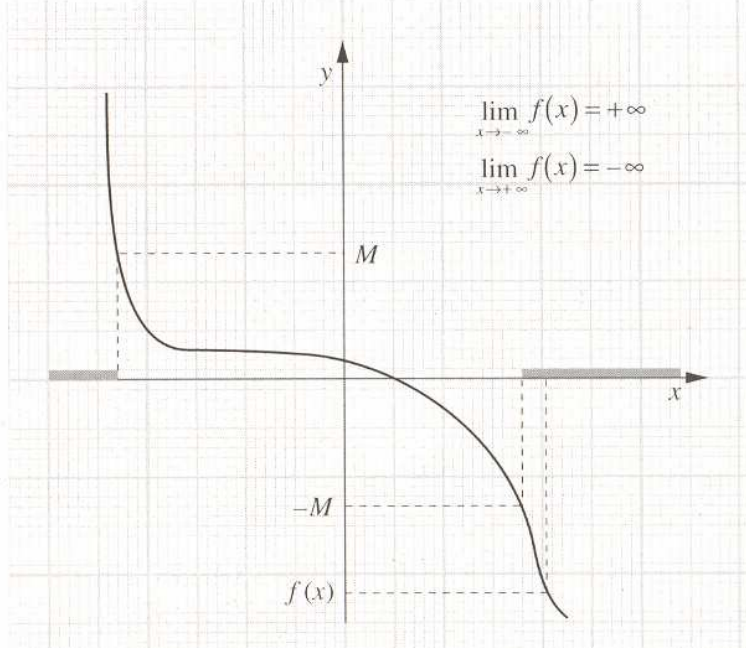


fig. 5

Definizione sintetica di limite

Si possono riassumere in una unica definizione i vari casi di limite. dicendo che si ha $\lim_{x \to x_\circ} f(x) = l$

(con x_o ed ℓ finiti o infiniti) se *f (x)* è compresa in un *prestabilito* intorno J_ℓ di ℓ purché x sia compreso in un *conveniente* intorno di x_o, Jx_o.

Limite destro e limite sinistro di una funzione

a) Si dice che la funzione *f(x)*, per x tendente a c dalla destra, ha per limite destro il numero *l* se, preso ad arbitrio un numero positivo ε , è possibile determinare, in corrispondenza ad esso, un intorno destro di c del tipo (c;c+ δ) con δ positivo, per tutti i punti del quale si abbia

$$\left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

b) Si dice che la funzione *f(x)*, per x tendente a c dalla sinistra, ha per limite sinistro il numero *l* se, preso ad arbitrio un numero positivo ε , è possibile determinare, in corrispondenza ad esso, un intorno sinistro di c del tipo (c-δ;c) con δ positivo, per tutti i punti del quale si abbia $\left| f(x) - l \right| < \varepsilon$

Teorema dell'unicità del limite

Se una funzione f(x) ha limite l *per x che tende a* x_0*, il limite è unico.*

Teorema del confronto

Se per tre funzioni g(x), f(x) e h(x), in un intorno del punto x_0*, si verifica la disuguaglianza*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \qquad (1)$$

e inoltre si ha:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \text{ e } \lim_{x \to x_0} h(x) = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se per x →c la funzione f(x), definita in un intorno di c, escluso al più il punto c, tende al limite finito ℓ diverso da 0, esiste un intorno di c per tutti i punti del quale, escluso al più il punto c, i valori della funzione hanno lo stesso segno del limite.

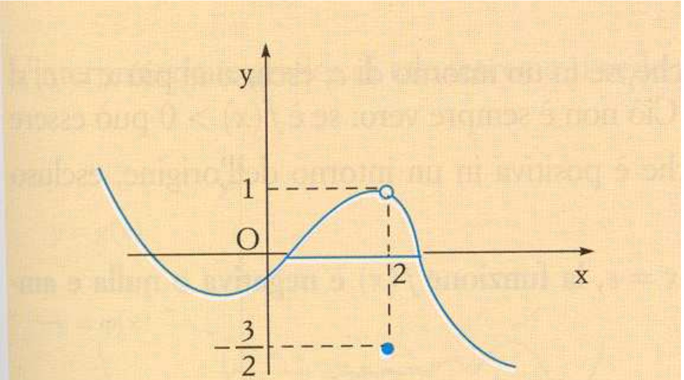


Figura 35

Funzioni continue e discontinue

Una funzione f(x) si dice **continua** in un punto x_0 se si verifica che:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

cioè se il limite nel punto è uguale al valore che la funzione assume in esso. Se una funzione è continua in un punto, ivi il suo grafico non presenta interruzioni. Una funzione che non è continua in un punto si dice **discontinua**.

Quando la continuità esiste in tutti i punti di un intervallo, la funzione si dice **continua nell'intervallo**.

Le funzioni razionali intere sono continue $\forall x \in \mathbb{R}$. Ad esempio

$$y = 3x^2 + 3x - 2$$

è continua per ogni valore reale di x in quanto il limite per x tendente a qualunque numero reale coincide col valore della funzione in esso.

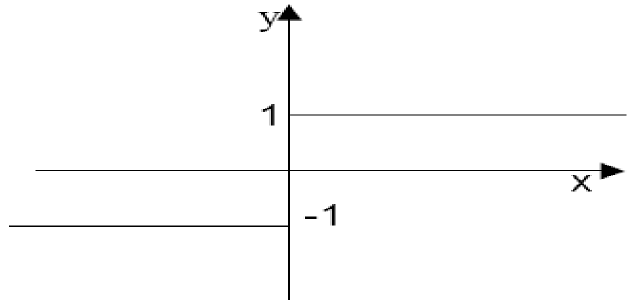
Le funzioni razionali fratte sono continue per qualsiasi valore reale eccetto i punti in cui si annulla il denominatore.

La funzione

$$y = \frac{x+3}{x-2}$$

non è continua in x=2.

La funzione $y = \frac{|x|}{x}$ (vedi fig in basso) è discontinua in x=0, in questo punto non è definita e di conseguenza il limite non può essere uguale a f(0) perché quest'ultimo valore non esiste.

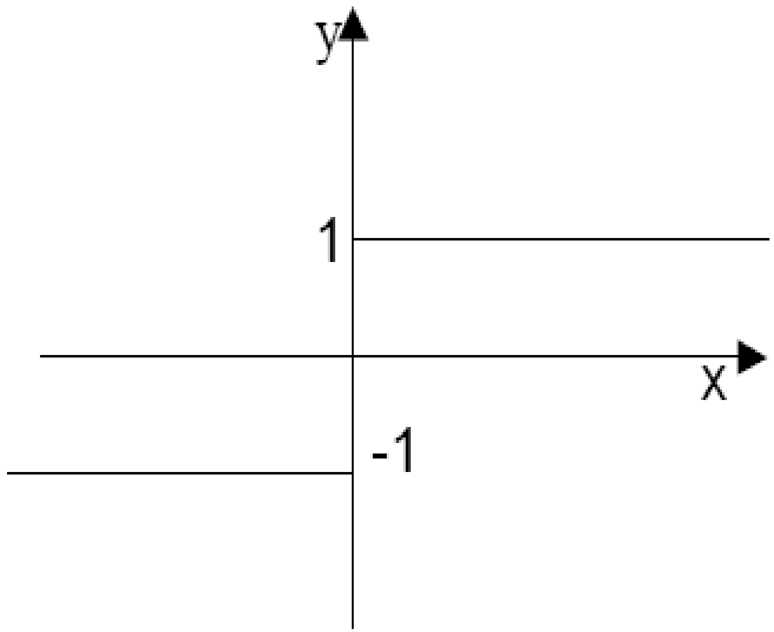


FUNZIONI DISCONTINUE

Quando la funzione non è continua si dice discontinua

Le discontinuità di una funzione possono essere di tre tipi: **I**,**II** e **III specie.**
Una funzione ha una discontinuità di I specie in un punto x_0 se ivi non è definita e i limiti destro e sinistro, per x che tende ad x_0, esistono e sono diversi fra loro.
Deve quindi essere:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$



FUNZIONI DISCONTINUE

Una funzione ha una discontinuità di II specie in un punto x_0 se, non è definita nel punto, il limite per x che tende a x_0 non esiste o uno almeno dei due limiti destro o sinistro vale ∞ .

La funzione

$$y = \frac{x+3}{x-2}$$

ha una discontinuità di seconda specie ne punto x=2. Infatti non è definita in x=2 e il limite per x che tende a 2 sia da sinistra sia da destra è uguale a ∞ .

FUNZIONI DISCONTINUE

Si ha una discontinuità di III specie in un punto x_0 se in esso la funzione non è definita ma esistono i limiti destro e sinistro uguali fra loro. Cioè se :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

In questo caso la discontinuità è detta **eliminabile** in quanto al grafico della funzione manca soltanto il punto in corrispondenza di x_0, la cui ordinata può essere sostituita col valore del limite.

La funzione

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ha una discontinuità di III specie nel punto x=1. Infatti sia il limite sinistro sia quello destro , per x che tende a 1 sono uguali a 2.

Tabella delle principali funzioni elementari

Funzione	Valori di x per cui $f(x)$ è continua
$f(x) = k$	$\forall x \in R$
$f(x) = x$	$\forall x \in R$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$ n pari	$x \geq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$ n dispari	$\forall x \in R$
$f(x) = a^x \quad a > 0$	$\forall x \in R$
$f(x) = log_a x \quad a > 0,\ a \neq 1$	$x > 0$
$f(x) = sen\ x$	$\forall x \in R$
$f(x) = cos\ x$	$\forall x \in R$
$f(x) = tg\ x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = cotg\ x$	$x \neq k\pi$
$f(x) = arc\ sen\ x$	$-1 \leq x \leq 1$
$f(x) = arc\ cos\ x$	$-1 \leq x \leq 1$
$f(x) = arc\ tg\ x$	$\forall x \in R$
$f(x) = arc\ cotg\ x$	$\forall x \in R$

ALGEBRA DEI LIMITI

Limite della somma algebrica di funzioni

1 **T** Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni che ammettono, per $x \to c$ (c finito o infinito), limiti finiti; sia cioè

$$\lim f_1(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim f_2(x) = l_2;$$

allora il limite della somma delle due funzioni esiste ed è la somma dei loro limiti e il limite della differenza delle due funzioni esiste ed è la differenza dei loro limiti.

In simboli

$$\lim_{x \to c} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \to c} f_1(x) \pm \lim_{x \to c} f_2(x) = l_1 \pm l_2$$

Limite del prodotto di due funzioni

4 **T** Il limite del prodotto di una costante per una funzione che ammette limite finito per $x \to c$ è uguale al prodotto della costante per il limite della funzione.

In simboli (*)

$$\lim_{x \to c} [k\, f(x)] = k \lim_{x \to c} f(x) = k\, l$$

Il limite del prodotto di due funzioni che ammettono limite finito per $x \to c$ è uguale al prodotto dei limiti delle due funzioni

Il limite della potenza, con esponente n intero positivo, che tende a un limite finito per $x \to c$ è la potenza n-esima del limite.