RAPPORTI E PROPORZIONI

Definizioni e teoremi generali

Definizione: Si chiama rapporto di due grandezze *A* e *B* della stessa specie la misura di *A* rispetto a *B,* presa come unità di misura.

Tale rapporto si indica con *A* : *B* oppure $\frac{A}{B}$.

In particolare, il rapporto di due grandezze uguali è uguale al, cioè *A* : *A* = 1.

Teorema: Il rapporto di due grandezze omogenee è uguale al quoziente delle loro misure rispetto a una stessa unità di misura.

Infatti, se ρ è il rapporto di *A* e *B,* si ha $\frac{A}{B}$ = $\rho \longrightarrow A = \rho B$. D'altra parte se *a* e *b* sono le misure delle due grandezze rispetto a un'unità arbitraria *U,* si ha *A* = *aU, B* = *bU,* per cui dall'uguaglianza precedente si deduce *aU* = ρ *(bU)* $\longrightarrow$ *aU* = (ρ*b)U* cioè *a* = ρ*b* da cui $\rho = \frac{a}{b}a$ c.v.d.

Definizione: Quattro grandezze *A, B,* C, D, omogenee fra loro le prime due e omogenee fra loro le ultime due, si dicono in proporzione se il rapporto tra *A* e *B* è uguale a quello tra C e D.

Si scrive in tal caso *A:B=C:D* (si legge «A sta a *B* come C sta a *D»).*

Le grandezze *A, B,* C, D si dicono i termini della proporzione; il primo e il quarto termine si dicono gli estremi; il secondo e il terzo i medi: il primo e il terzo gli antecedenti; il secondo e il quarto i conseguenti.

Nella proporzione *A* : *B* = C : D,

la grandezza D si dice quarta proporzionale dopo *A, B,* C. Una proporzione avente i medi o gli estremi uguali fra loro si dice continua: in questo caso tutte le grandezze devono essere omogenee fra loro.

Nella proporzione continua *A* : *B* = *B* : C, la grandezza *B* si dice media proporzionale o media geometrica fra *A* e C e la grandezza C si dice terza proporzionale dopo *A* e *B.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché quattro grandezze prese in un certo ordine, omogenee fra loro le prime due e omogenee fra loro le altre due, formino una proporzione è che siano in proporzione le loro misure.

Premettiamo alle proprietà delle proporzioni tra grandezze un richiamo alle proporzioni numeriche già studiate in Aritmetica.

Come è noto, le proprietà dell'uguaglianza e delle operazioni tra i numeri razionali valgono anche per tutti i numeri reali; in particolare potremo estendere ai numeri reali non solo la definizione, ma anche tutte le proprietà, delle proporzioni tra numeri razionali.

Varrà, anche per i numeri reali, la proprietà fondamentale contenuta nel teorema seguente: condizione necessaria e sufficiente affinché quattro numeri reali, in un certo ordine, siano in proporzione è che il prodotto degli estremi sia uguale a quello dei medi.

In base a questo teorema si possono dedurre, anche per i numeri reali, tutte le proprietà delle proporzioni già viste per le proporzioni tra numeri razionali.

Si possono senz'altro estendere alle proporzioni fra grandezze tutte le proprietà delle proporzioni numeriche.

Teorema *della quarta proporzionale.* Date tre grandezze *A, B,* C delle quali le prime due omogenee, esiste una e una sola grandezza omogenea con la terza, che con le date formi una proporzione, ossia esiste una e una sola quarta proporzionale dopo *A, B,* C.

Ne segue che, se si ha contemporaneamente *A:B=C:D* e *A:B=C:D',* allora è senz' altro *D=D'.*

Poiché un termine qualunque di una proporzione si può sempre far diventare il quarto (invertendo o, se le quattro grandezze sono tutte omogenee tra loro, permutando), si ha che *se tre termini qualunque di una proporzione sono uguali ai termini corrispondenti di un'altra, anche i rimanenti quarti termini sono uguali.*

Grandezze proporzionali

Definizione: Si dice che le grandezze di due insiemi in corrispondenza biunivoca sono direttamente proporzionali (o, semplicemente, sono proporzionali) quando il rapporto fra due qualunque grandezze del primo insieme è uguale al rapporto delle grandezze corrispondenti dell'altro, cioè quando sussistono le proporzioni

*A:B=A':B'; A:*C *=A':C'; B:*C= *B':C';* ecc. (1)

Se si fissa, per ciascuna classe di grandezze, un'unità di misura, indicando con *a, b, c, ... a', b', c',* ...le misure delle corrispondenti grandezze, le (1) si possono scrivere come proporzioni tra numeri: *a: b = a'* : *b'; a:c=a:c; b*: *c = b*: *c';*ecc. (2)

Le relazioni (2) si possono così interpretare:

se due classi di grandezze sono proporzionali, *il rapporto tra le misure di due grandezze del primo insieme è sempre eguale al rapporto tra le misure delle due grandezze corrispondenti del secondo insieme.*

Le (2), permutando i medi, diventano *a: a' = b: b'; a: a' = c* : *c'; b* : *b' = c* : *c'* ecc.
Ossia *a:a'=b:b'=c:c'=...,* (3)
cioè *date due classi di grandezze proporzionali, il rapporto tra le misure, rispetto a prefissate unità, di due grandezze corrispondenti è un numero costante, detto* costante di proporzionalità.

Si possono presentare due casi.

a) Le grandezze della prima classe sono omogenee con quelle della seconda (ad esempio si tratta di due classi di lunghezze, come nel prossimo esempio 1) e si sceglie la stessa unità di misura per le due classi. In tal caso la costante di proporzionalità, essendo il rapporto tra le misure, rispetto a una stessa unità, di due grandezze omogenee, non dipende dall'unità di misura prescelta.

b) Le grandezze della prima classe non sono omogenee con quelle della seconda oppure, pur essendo omogenee sono misurate rispetto a diverse unità. In questi casi la costante di proporzionalità può essere considerata la misura di una nuova grandezza la cui unità di misura è il rapporto tra le unità di misura considerate per le due classi di grandezze.

Definizione: Se le grandezze di due insiemi in corrispondenza biunivoca sono tali che il rapporto di due qualunque grandezze del primo insieme è uguale al rapporto inverso delle grandezze corrispondenti dell'altro insieme, si dice che esse sono inversamente proporzionali.
Si avrà in tal caso *A: B = B'* : *A'; A:* C = C': *A';* ecc.
Sussiste il seguente importante teorema, criterio generale di proporzionalità:

Condizione necessaria e sufficiente affinché le grandezze di due insiemi in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che

1°) a grandezze uguali dell'uno corrispondano grandezze uguali dell' altro;

2°) alla somma di due o più grandezze qualunque del primo insieme corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti del secondo insieme.

Teorema: Se due insiemi di grandezze tutte della stessa specie sono direttamente proporzionali, la somma di quante si vogliano grandezze del primo insieme sta alla somma delle corrispondenti del secondo come ogni grandezza del primo sta alla corrispondente del secondo.
Vediamo ora alcuni esempi di insiemi di grandezze direttamente proporzionali.
Teorema: Gli archi di una stessa circonferenza (o di circonferenze congruenti) e i rispettivi angoli al centro sono grandezze direttamente proporzionali.

Teorema: I rettangoli aventi altezze congruenti sono proporzionali alle rispettive basi.
Poiché in un rettangolo si può considerare come altezza uno qualunque dei lati, il teorema dimostrato si può anche enunciare dicendo: i rettangoli di basi congruenti sono proporzionali alle rispettive altezze.
Corollario 1° *I parallelogrammi di congruenti altezze (o basi) sono proporzionali alle rispettive basi (o altezze).*
Corollario 2° I triangoli di congruenti altezze (o basi) sono proporzionali alle rispettive basi (o altezze).
Se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo dei medi è equivalente al rettangolo degli estremi.

Teorema di Talete e sue conseguenze
Teorema di Talete: Un fascio di rette parallele determina sopra due trasversali due insiemi di segmenti direttamente proporzionali.
Corollario: La parallela a un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.
Il corollario precedente si inverte nel teorema seguente.
Se una retta divide in parti proporzionali due lati di un triangolo (o **determina sui prolungamenti di due lati di un triangolo segmenti proporzionali a essi), è parallela al terzo lato.**
La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato **opposto in parti proporzionali agli altri due lati.**
Procedendo analogamente, lo studente potrà dimostrare il seguente teorema. La bisettrice di un angolo esterno di un triangolo, se non è parallela al lato opposto, ne incontra il prolungamento in un punto che determina con gli estremi di quel lato segmenti proporzionali agli altri due lati.